

Сергей Александрович Нефедов (р. 1951) — выпускник математико-механического факультета УрГУ. Кандидат физико-математических наук (1981). Более двадцати лет преподавал на кафедре вычислительной математики, занимаясь сначала теорией управления, а затем приложениями математики к истории и экологии, в том числе теорией демографических циклов. Известен как писатель-популяризатор, автор четырех монографий, посвященных интерпретации мировой истории с точки зрения теории циклов. В настоящее время — старший научный сотрудник Института истории и археологии УрО РАН. В 1999 г. успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата исторических наук.

Академик РАН Н.Н. Красовский в отзыве на автореферат диссертации отметил: «Оригинальное по своим идеям и методам исследование С.А. Нефедова лежит в пограничной области нескольких наук — социально-экономической истории, исторической демографии и математической экологии, в том числе экспериментальной математики... Считаю, что работа С.А. Нефедова является фундаментальным научным исследованием в актуальной области науки. Она представляет серьезный теоретический и прикладной интерес. Полагаю, что, будучи посвящена историческим процессам, работа актуальна и для современности...»

О ЗАКОНАХ ИСТОРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Сорок лет назад, в декабре 1958 г., великий историк Фернан Бродель заявил о рождении «новой исторической науки» — *la nouvelle histoire*. «Очень нелегко переубедить историков и особенно преподавателей общественных наук, упорно желающих понимать под историей то, чем она была вчера, — писал Фернан Бродель. — А между тем, новая историческая наука уже существует (курсив наш. — С.Н.), непрерывно совершенствуясь и видоизменяясь... Я говорю вам, перед историей зажегся огонь нового дня!»¹ Бродель утверждал, что зарождение новой истории связано с методом междисциплинарного синтеза и появлением школы «Анналов». Синтез истории, географии, экономики,

социологии, демографии — так выглядела новая наука в глазах великого историка. Новая история становилась точной наукой, в трудах своих основателей — Франсуа Симиана и Эрнеста Лабрусса — она превращалась в статистические описания, в длинные ряды чисел, характеризующих производство, цены, заработную плату. Эти ряды чисел анализировались математическими методами с целью выявления циклических закономерностей. «Я верю в плодотворные последствия статистического анализа, — писал Фернан Бродель. — Новая экономическая и социальная история на первый план в своих исследованиях выдвигает проблему циклического изменения, она заворожена фантомом, но

© С. А. Нефедов, 1999

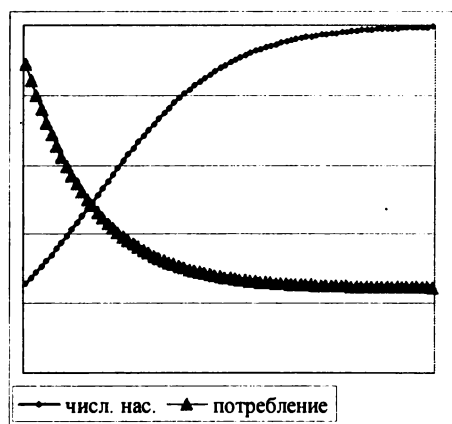


Рис. 1. Логистическая кривая и кривая душевого потребления

вместе с тем и реальностью циклического подъема и падения цен»².

Уже в первых работах Симиана и Лабрусса, вскоре после появления «Анналов», были выявлены циклические колебания цен и реальной заработной платы в XVI—XVIII вв.³ Таким образом, была обнаружена повторяемость исторических процессов, то есть были найдены *законы истории*. Правда, ни Симиан, ни Лабрусс поначалу не понимали природы обнаруженных колебаний, смысла открытых ими закономерностей. Понимание пришло нескоро, для решения проблемы понадобились труды многих исследователей из разных стран. Лишь два десятилетия спустя, в 1950-х гг., было признано, что циклические колебания имеют в основе демографическую природу.

Еще в начале 20-х гг. американский биолог и демограф Раймонд Пирл показал, что рост популяций в живой природе описывается так называемым логистическим уравнением⁴

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right) N.$$

В этом уравнении N — численность населения, которая зависит от

времени t ; r — коэффициент естественного прироста, K — максимальная численность при существующих ресурсах. Решение этого уравнения называется логистической кривой. Логистическая кривая сначала возрастает довольно медленно, потом рост ускоряется, но через некоторое время кривая приближается к асимптоте $N = K$, поворачивает и далее движется вдоль асимптоты. Это означает, что популяция приблизилась к границам экологической ниши и голодная смертность скомпенсировала естественную рождаемость. Уровень заполнения экологической ниши — величина $P = N/K$ — называется *демографическим давлением*, и логистическая кривая, взятая в относительном масштабе, есть кривая роста демографического давления. Поскольку продовольственные ресурсы остаются ограниченными, то по мере роста населения соответственно убывает душевое потребление (рис. 1). Движение населения по логистической кривой называется *демографическим циклом*. Конечная стадия демографического цикла отличается неустойчивостью, случайные колебания внешних факторов могут привести к *демографической катастрофе* — гибели значительной части населения, после чего демографическое давление падает и начинается новый демографический цикл.

Логистическое уравнение было получено Р. Пирлом при изучении динамики роста биологических популяций, и многие демографы сомневались в возможности распространения этой теории на популяцию *homo sapiens*. Однако в 1934 г. немецкий историк Вильгельм Абель, проанализировав данные об экономической конъюнктуре в Германии в XII—XIV вв., показал, что рост численности населения в этот пери-

од привел к исчерпанию ресурсов пахотных земель; это в свою очередь привело к нехватке продовольствия, росту цен на зерно и голоду⁵. Эпидемия чумы, разразившаяся в условиях, когда миллионы людей были ослаблены постоянным недоеданием, привела к катастрофическим последствиям — погибло около половины населения Европы. Это была демографическая катастрофа, завершившая демографический цикл. Таким образом, было показано, что описанные Р. Пирлом циклы реально существовали в истории.

Работы В. Абея нашли широкий отклик в среде историков разных стран. Количество работ, посвященных данной тематике, быстро росло. Однако оставалось неясным, как судить о численности населения в отсутствие надежных статистических данных. В 1950 г. Майкл Постан показал, что в условиях аграрной экономики о росте или убывании населения можно судить по величине реальной заработной платы сельскохозяйственных рабочих⁶. При возрастании численности населения в деревне появляются безземельные крестьяне и рабочие руки дешевеют; при сокращении численности населения крестьяне обеспечены землей и рабочая сила дорожает. Таким образом, циклические колебания численности населения порождали циклы цен и заработной платы. Стало ясно, что циклы, обнаруженные Симианом и Лабруссом — это и есть демографические циклы Пирла. С этого времени для анализа демографической ситуации стали применяться данные о ценах и реальной заработной плате, т. е. о душевом потреблении; построение таких графиков (см., например, рис. 2) стало основным способом подтверждения реальности демографических и экономических циклов.

Новая история разрабатывалась усилиями М. Постана, Д. Салмарша,

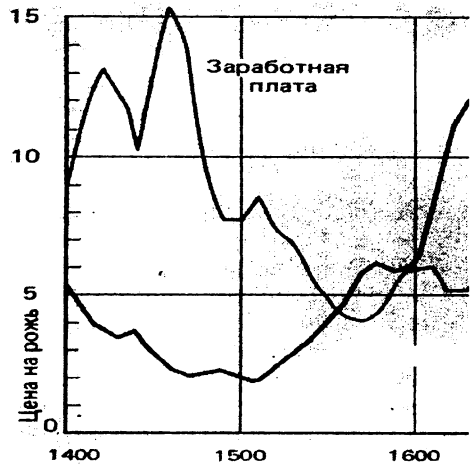


Рис. 2. Заработная плата (кривая душевого потребления) и цена ржи в Германии. Заработная плата выражена в килограммах ржи; падение потребления отражает рост демографического давления в цикле XV-XVI вв. График, построенный по данным В. Абея, воспроизведен в книге Ф. Броделя. (Бродель Ф. Материальная цивилизация, экономика и капитализм, XV—XVII вв. Т. 1. Структуры повседневности. М., 1986.)

Д. Рассела, Е. Миллера, Д. Титова, Р. Хилтона в Англии; Ж. Мевре, П. Губера, Ф. Броделя, Э. Лабрусса, Р. Мунье, Э. Ле Руа Ладюри, Э. Перруа, Э. Бутрюша во Франции; Ф. Лютге, Э. Кельтера, Э. Кейзера, К. Хеллейнера в Германии — в этот далеко не полный список включены лишь самые известные имена. Концепция демографических циклов вошла в энциклопедические многотомные издания: «Кембрижская экономическая история Европы», «Экономическая и социальная история Франции», «История Италии». В последнее время эта концепция становится базой для учебных курсов по экономической истории. В качестве примера можно привести опубликованный в Оксфорде курс

известного историка и экономиста Р. Камерона⁷.

Целью настоящей работы является построение компактной модели, описывающей основные процессы, протекающие на протяжении демографического цикла. Верификация модели проводилась на материалах, относящихся к истории Китая I—II вв. — для этого периода в источниках имеются сведения о численности населения и посевных площадях, что позволяет сравнить расчетные данные с реальностью⁸.

Обозначим время (в годах) величиной t , площадь пашни — $S(t)$, а численность населения — $Y(t)$. Площадь пашни при данном развитии производительных сил ограничена некоторой максимальной величиной S_m , которая в I—II вв. составляла около 34 млн га. Ввиду этого обстоятельства площадь пашни не возрастает пропорционально численности населения: начиная с некоторого момента она стремится к асимптоте S_m . Зависимость посевной площади S от численности населения Y можно описать с помощью логистического уравнения

$$\frac{dS}{dY} = r_0 \left(1 - \frac{S - S_0}{S_m - S_0}\right) S.$$

Начальное условие для этого уравнения имеет вид $S(Y_0) = S_0$, где $Y_0 = 21$, $S_0 = 16.4$ (в 57-м г. при численности населения в 21 млн посевные площади составили 16.4 млн га). Это уравнение имеет решение

$$S = \frac{S_m}{1 + C e^{rY}}, \text{ где } r = \frac{r_0 S_m}{S_0 - S_m}.$$

Константу C можно найти из условия, что в 88-м г. при численности населения 43.4 млн человек по-

севные площади составили 33.8 млн га. Таким образом, мы можем найти закон изменения площади пашни в зависимости от численности населения. Пусть q — величина высева на гектар пашни (в нашем случае 45 кг), тогда $M = qS$ есть масса высеваемого зерна. Далее, обозначим p_0 минимальное потребление на душу населения; в нашем случае можно принять p_0 равным 215 кг зерна в год. Величина $P_0 = p_0 Y(t)$ есть минимальное совокупное потребление, а $W = M + P_0$ — минимальное количество зерна, необходимое для потребления и посева. Пусть $X(t)$ — имеющееся после сбора урожая количество зерна (урожай и запасы). Если $X(t) > W$, то крестьяне имеют излишки зерна, и $u = (X(t) - M)/Y(t)$ — количество зерна (на душу населения), которое может быть потреблено в текущем году. Разумеется, крестьяне не проедают все это зерно, оставляя часть его про запас. Будем считать, что они оставляют про запас половину имеющихся излишков. Обозначим максимальное потребление p_m , тогда функция душевого потребления имеет вид

$$p(u) = \begin{cases} (u - p_0)/2 + p_0 & \text{при} \\ p_0 \leq u \leq 2p_m - p_0 \\ p_m & \text{при } u \geq 2p_m - p_0 \end{cases}$$

Реальное совокупное потребление будет равно $P_1 = p(u)Y(t)$, а реальные расходы на потребление и посев $W_1 = M + P_1$, так что ко времени сбора следующего урожая у крестьян останутся переходящие запасы, равные $Z_p = X(t) - W_1$. Далее, пусть l_0 — сбор на одно зерно посева (в наших условиях $l_0 = 15—25$); урожайность, разумеется, была непостоянной, и мы учтем это обстоятельство, добавив к l_0 случайную величину dl_0 , так что реальная урожайность будет равна $l = l_0 + dl_0$.

Урожай следующего года будет равен IM ; из этого количества нужно вычесть налоги, которые составляют $1/30$ урожая и 120 монет с каждого взрослого (23 монеты с подростка). В среднем каждый китаец платил 60 монет; в урожайные годы цена 1 ху (20 литров — 16 кг) зерна составляла 20 монет, стало быть, 60 монет эквивалентны 48 кг зерна. Таким образом, на уплату налогов требуется количество зерна, равное $H = IM/30 + 0.048Y(t)$. С учетом переходящих запасов количество зерна после сбора урожая будет равно

$$X(t+1) = IM - H + X(t) - W_1.$$

Теперь остается определить численность населения $Y(t+1)$. В классической логистической модели Р. Пирла

$$Y(t+1) = \frac{rY(t)}{1 + (r-1)\frac{Y(t)}{K}},$$

где r — коэффициент естественного прироста в благоприятных условиях, а K — емкость экологической ниши, т. е. максимально возможная численность населения при имеющихся продовольственных ресурсах. В нашем случае $K = P_1/p_0$; кроме того, мы будем использовать модернизированную модель, в которой

член $\frac{Y(t)}{K}$ заменяется на $\left(\frac{Y(t)}{K}\right)^n$,

где n — показатель компенсации, введенный Мэйнардом Смитом и Слаткином². Введение этого показателя объясняется тем, что в человеческом обществе голод приводит не только к высокой смертности, но также к восстаниям и войнам, резко увеличивающим коэффициент смертности.

Рассмотрим теперь случай, когда крестьяне испытывают недоста-

ток зерна, т. е. $X(t) < W$. В таком случае, потребляя зерно по «голодной норме» p_0 , крестьяне к весне будут испытывать недостаток посевного зерна. Они продают часть земли, так чтобы восполнить посевной фонд, или берут в долг, что в конечном счете приводит к продаже. В некоторых случаях помещики, имея ограниченный запас зерна, не могут купить все предложенные к продаже крестьянские земли — тогда крестьяне уменьшают фонд потребления P_1 , так, что $M + P_1 = X(t)$. В этом случае $u < p_0$ и душевое потребление $p(u) = P_1 / Y(t)$. Если голод достигает больших размеров и грозит гибелью значительной части населения, то власти (если у них есть зерно) выдают голодающим пособия, доводя, таким образом, потребление до некоторой величины p_{uo} .

По мере того как крестьяне продают свои земли, постепенно развивается помещичье землевладение, а площадь крестьянских земель уменьшается. Помещики приглашают на свои земли арендаторов, которые отдают им половину урожая, следовательно, на одного арендатора приходится вдвое большая площадь, чем на крестьянина: примерно 1,3 га. Если в текущем году крестьяне продали наделы площадью D_a , то на этих землях можно разместить $N_a = D_a/1.3$ арендаторов, и крестьянское население уменьшается на величину N_a .

Рассмотрим теперь динамику численности арендаторов. Обозначим S_a площадь земель, на которых хозяйствуют арендаторы, $Y_a(t)$ — численность арендаторов в году t и $X_a(t)$ — имеющиеся у них запасы хлеба за вычетом налогов и посевного фонда. Масса высеваемого арендаторами зерна равна $M_a = qS_a$, а минимальное совокупное потребление $P_{a0} = p_0 Y_a(t)$. Если $X_a(t) > P_{a0}$, то арендаторы имеют излишки зер-

на, и в этом случае душевое потребление арендаторов (p_{ua}) рассчитываются так же, как для крестьян. Реальные расходы на потребление составят $P_a = p_{ua} Y_a(t)$, так что ко времени сбора следующего урожая у арендаторов останутся запасы, равные $X_a(t) - P_a$. Урожай следующего года будет равен IM_a , а налоги — $H_a = IM_a/30 + 0.048 Y_a(t)$. Поскольку арендатору за вычетом налогов и посева фонда причитается лишь половина урожая, то запасы зерна после сбора урожая будут равны $X_a(t+1) = (IM_a - H_a)/2 + X_a(t) - P_a$. Емкость экологической ниши для арендаторов определяется по формуле $K = P_a/p_o$, а численность — так же, как для крестьян. К расчетной численности каждый год добавляется величина N_a — число крестьян, ставших новыми арендаторами. Этим новым арендаторам помещики выделяют наделы в среднем 1,3 га на человека, а также ссужают зерном, необходимым для посева и годовой нормы потребления, — в среднем 250 кг на одного человека.

Помещики заинтересованы в поддержании своих арендаторов, поэтому в годы большого голода они выдают им зерновые ссуды, с тем чтобы довести потребление до минимума p_{a1} . В благоприятные годы крестьяне возвращают свой долг.

Помещики расходуют свои зерновые ресурсы не только в ростовщических или потребительских целях, но и на приобретение ремесленных изделий и на содержание слуг. Пусть численность ремесленников в год t составляет $Y_r(t)$ и у них имеются запасы хлеба $X_r(t)$. Минимальное совокупное потребление составит $P_{r0} = p_o Y_r(t)$. Если $X_r(t) > P_{r0}$, то ремесленники имеют излишки зерна, и в этом случае их душевое потребление (p_{ur}) рассчитывается так же, как для крестьян. Реальные расходы на потребление составят $P_r = p_{ur} Y_r(t)$, так что

ко времени сбора следующего урожая у ремесленников останутся запасы, равные $X_r(t) - P_r$. Налоги составляют $H_r = 0.48 Y_r(t)$. Если положить, что на долю ремесленников приходится k_r % зерна, причитающегося помещикам, то запасы следующего года составят $X_r(t+1) = k_r(IM_a - H_a)/2 - H_r + X_r(t) - P_r$. Емкость экологической ниши для ремесленников определяется по формуле $K = P_r/p_o$, а численность — так же, как для крестьян.

В годы голода ремесленники берут зерно в долг у помещиков, стараясь увеличить потребление хотя бы до величины голодного минимума p_{r1} . В благоприятные годы они возвращают свой долг вместе с процентами.

В годы голода, когда крестьяне продают землю, часть из них пытается заняться ремеслом: одни уходят в города, другие занимаются ремеслом как подсобным промыслом. Для расчетов удобнее разделять ремесленников и крестьян: к примеру, мы считаем, что четверо крестьян, получающих четвертую часть дохода от ремесла, эквивалентны трем крестьянам и одному ремесленнику. Крестьяне в основном живут натуральным хозяйством, и ремесленники продают свои товары тем, у кого есть избыток зерна — преимущественно помещикам. Количество вновь открывающихся «вакансий» ремесленников и слуг ограничено приростом дохода помещиков от эксплуатации размещенных в прошлом году арендаторов; если D_a — земли новых арендаторов, а H_{aa} — уплачиваемые ими налоги, то доход помещика с них составит

$$G = (0.65(1 - l) D_a - H_{aa})/2.$$

Из этого дохода ремесленникам может поступить k_r %, и при норме потребления p_o численность новых ремесленников и слуг может составить $k_r G/p_o$. Оставшуюся часть дохода помещики используют на по-

требление и накопление запасов; мы будем считать, что доли, используемые на потребление и накопление, равны. Государство также производит накопление запасов; в соответствии с рекомендацией трактата «Гуань-цзы» в государственные амбары откладывается половина зерна, получаемого государством в качестве поземельного налога.

Математические модели обычно содержат некоторые неопределенные параметры, которые подбираются путем численного эксперимента. В нашем случае наиболее важен параметр n — коэффициент компенсации, описывающий, в частности, смертность населения при падении потребления $p(u)$ ниже «голодной нормы» p_0 . Если рассматривать традиционную логистическую модель ($n=1$), то при сокращении «голодной нормы» наполовину численность населения убывает лишь на 3%. Это явно нереально, так же как варианты $n=2$ и $n=3$, поэтому мы будем рассматривать случаи $n=4-6$.

Каковы же результаты расчетов по описанной модели? Рассмотрим графики, изображенные на рис.3. (для этого случая $n = 6$, $r = 1.03$) Присутствие случайных колебаний урожайности обуславливает «вибрирующий» характер кривых, и при различных прогонах программы результаты могут меняться в пределах нескольких процентов. Примерно до 100-го г. колебания урожайности не влияют на численность населения; как показывают расчеты, в этот период у крестьян имеются многолетние запасы зерна и неурожай не приводит к голоду; кривая роста численности населения «заглажена» и устойчива. Как можно заключить из графика, расчетная численность населения хорошо согласуется с данными переписей. Согласуются и общие тенденции: В 57—85 гг. крестьяне интенсивно распахивали землю и у них скопились большие запасы зерна (рис. 3). Потребление в этот период было высоким, и численность населения быстро увеличивалась. После 85-го г. с постепен-

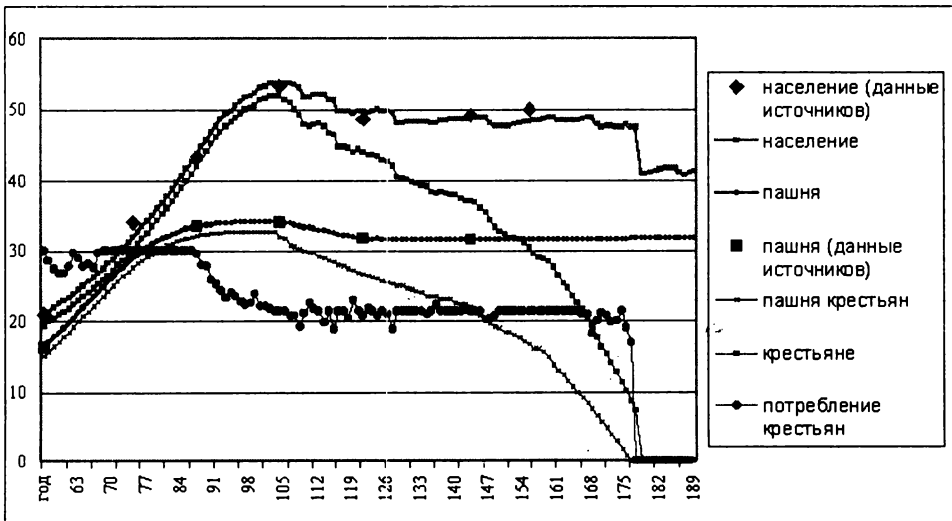


Рис. 3. Численность населения (млн чел.), пашня (млн га) и потребление крестьян по расчетным данным

ным истощением резервов свободных земель внутренняя колонизация замедлилась, а население продолжало расти, так что потребление стало превышать размеры урожаев, и запасы стали сокращаться. В 102-м г. запасы исчерпались и начался голод. В условиях голода крестьяне стали продавать землю, это позволило многим из них избежать голодной смерти, однако численность населения заметно снизилась. К этому времени источники относят первую волну крестьянских восстаний.

После первого кризиса начался период стагнации. Продажи земли привели к дефициту пашни, что в свою очередь привело к голоду и новым продажам. Численность крестьян-собственников постоянно уменьшалась за счет голодной смертности и перехода в арендаторы или в ремесленники. К этому времени источники относят бурный рост городов и развитие ремесел. Численность ремесленников и арендаторов росла, однако это не означает, что их уровень жизни был высоким; как показывают расчеты, душевое потребление находилось на уровне «голодной нормы» и рост шел лишь за счет притока разоренных крестьян.

Фактически период после окончания внутренней колонизации был временем постоянного голода. Демографическое давление в этот период остается максимально высоким и близко к пределу, за которым начинается гибель населения.

В исторических источниках приводятся данные переписей населения до 157-го г. — после этого времени разложение государственного аппарата достигло такой степени, что переписи перестали проводиться. Что могут сказать расчеты об этом периоде?

Мы видим, что процесс разорения крестьянства заканчивается де-

мографической катастрофой, резким сокращением численности населения в 180-х гг. — и действительно, в это время произошло восстание «желтых повязок», а затем начались долгие междоусобные войны. Расчеты выявляют механизм этой демографической катастрофы. В период 102—160 гг. происходил процесс разорения крестьянства, крестьяне жили в условиях постоянного голода и, чтобы избежать голодной смерти, продавали свои земли. Однако по мере того как крестьяне продавали землю, росла диспропорция между их численностью и площадью крестьянских земель — катастрофически нарастало малоземелье (рис. 3). В конце концов земли осталось так мало, что ее продажа не могла спасти крестьян — начался страшный голод, сопровождаемый эпидемиями и приведший к восстаниям. Следует особо отметить, что голод происходил в годы стабильных урожаев и поразил лишь крестьян-собственников, составлявших к тому времени меньшую часть населения, однако восстания и войны вовлекли в свою орбиту все население, и их последствия имели катастрофический характер.

Другое, и пожалуй, наиболее важное обстоятельство, объясняющее периодически повторяющиеся катастрофы, — это неустойчивость демографических процессов в период стагнации. В этот период крестьяне практически не имеют зерновых запасов, поэтому, как показывают расчеты, повторение неурожайных лет само по себе может привести к демографической катастрофе — независимо от процесса разорения крестьянства.

Конечно, расчеты по математической модели зависят от некоторых параметров, которые в действительности неизвестны и под-

бираются эмпирически. Можно менять эти параметры — тогда изменятся время и масштабы катастрофы, но суть явления остается неизменной: катастрофа все равно происходит. Более того, в некоторых случаях она может быть гораздо более грозной, чем показывают приведенные графики. Можно увеличить разброс урожайности — тогда кривая численности населения начнет «вибрировать» сильнее, и могут появиться другие катастрофы, связанные с неурожаем и стихийными бедствиями. Как бы то ни было, напрашивается вывод о нестабильности традиционного крестьянского общества в эпоху до промышленной революции. Цикл эпохи Хань был лишь одним из многих демографических циклов в истории Китая — и естественный ход событий всегда приводил к разорению крестьянства, восстаниям и демографическим катастрофам.

Разумеется, законы экологии и математики действовали не только на территории Китая — им был подвластен весь мир, и он остается в их власти до сих пор. Конечно, в наше время развитие общества описывается более сложными уравнениями, но мы не должны отбрасывать опыт прошлого и делать вид, что история нас не касается.

«Прошлое — учитель дел будущего», — писал министр императора У-ди, великий историк Сыма Цянь.

¹ Braudel F. Histoire et sciences sociales. La longue duree // Annales. 1958. Octobre—decembre; Русский перевод: Бродель Фернан. История и общественные науки. Историческая длительность // Философия и методология истории. М., 1977. С. 117, 128.

² Там же. С. 118, 140.

³ См.: Simiand F. Recherches anciennes et nouvelles sur le mouvement general des prix au XVIe au XIXe siecles. P., 1932; Labrousse C.-E. Esquisse du mouvement des prix et des revenus en France au XVIIIe siecle. Vol. 1—2. P., 1933.

⁴ См.: Pearl R. The Introduction to Medical Biometry and Statistics. Philadelphia, 1930; Ibid. The Natural History of Population. L., 1939.

⁵ См.: Abel W. Bevölkerungsgang und Landwirtschaft im ausgehenden Mittelalter im Lichte der Preis — und Lohnbewegung // Schmollers Jahrbucher. 1934; Bd. 58; Idem. Agrarkrisen und Agrarkonjunktur in Mitteleuropa vom 13. bis zum 19. Jahrhundert. Berlin, 1935.

⁶ Postan M. Same economic evidence of declining population in the later middle ages // The Economic History Review. Ser. 2. 1950. Vol. 2, № 3.

⁷ См.: Cameron R. A concise economic history. From paleolithic times to the present. N. Y.; Oxford, 1989.

⁸ См.: Lee Mabel Ping-hua. The Economic History of China. N. Y., 1921; Крюков М. В., Переламов Л. С., Софронов и др. Древние китайцы в эпоху централизованных империй. М., 1983; Кульпин Э. С. Человек и природа в Китае. М., 1990.

⁹ Smith J. Maynard, Slatkin M. The stability of the predator-prey systems. // Ecology. 1973. Vol. 54. P. 384—391.